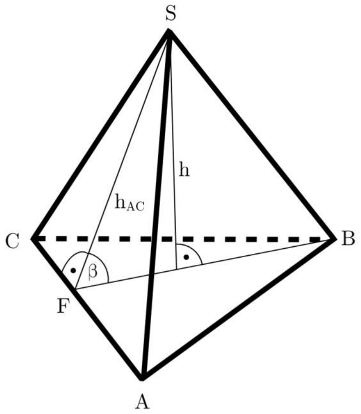
Dreiseitige Pyramide

Von einer dreiseitigen Pyramide (S. Skizze) kennt man alle vier Eckpunkte:

A(5 | –1 | –1), B(–1 | 5 | 2), C(–1 | 1 | 2), S(3 | 5 | 10)



1. **Berechne das Volumen der Pyramide auf 2 Arten:**

   $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

   und $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{d} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right)\right|$**, wobei** $\vec{d} = \overrightarrow{AS}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ **und** $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

2. **Berechne die Oberfläche der Pyramide!**

3. **Kontrolliere das Ergebnis des Flächeninhalts des Dreiecks ACS mit der Formel** $A = \frac{b \cdot h_{AC}}{2}$.

4. **Berechne den Neigungswinkel β, den die Seitenfläche ACS mit der Grundfläche einschließt!**

5. **Berechne den Abstand der Trägergeraden der Seitenkanten AC und BS!**

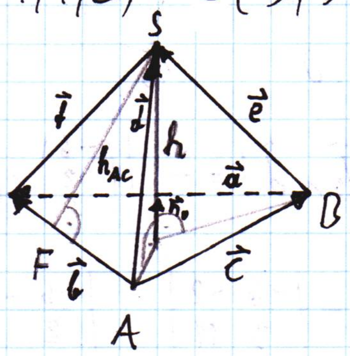
Hausübung:

- Punkt 3 für das Dreieck ABS mit $A = \frac{c \cdot h_{AB}}{2}$.
- Punkt 4 für die Seitenfläche ABS.
- Punkt 5 für die Trägergeraden von AB und CS.

81. Schulübung

Beispielzettel

A(5/−1/−1) B(−1/5/2) C(−1/1/2) S(3/5/10)



1) $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

$G = \frac{1}{2} \left| \vec{c} \times \vec{b} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right|$

$G = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{720} \approx \underline{\underline{13{,}42\ (E^2)}}$

$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

$18 - 6 \quad -(-18+18) \quad -12+36$

$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ +2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$h = \vec{d}$ projiziert auf $\vec{n}_0$

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{c}\times\vec{b}}{|\vec{c}\times\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix}12\\0\\24\end{pmatrix}}{\sqrt{720}} \qquad \vec{d} = \vec{AS} = \begin{pmatrix}-2\\6\\11\end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = \vec{BS} = \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$$

$$h = \vec{d}\cdot\vec{n}_0 = \frac{\begin{pmatrix}-2\\6\\11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\0\\24\end{pmatrix}}{\sqrt{720}} = \frac{-24+264}{\sqrt{720}} \approx \underline{8{,}94}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 13{,}42\cdot 8{,}94 = \underline{\underline{40\,(E^3)}}$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{d}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-2\\6\\11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\0\\24\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 240 = \underline{\underline{40\,(E^3)}}$$

---

2) $$A_{ABS} = \frac{1}{2}|\vec{c}\times\vec{d}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-6\\6\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\11\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}48\\60\\-24\end{pmatrix}\right| = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{6480} \approx 40{,}25\,(E^2)}}$$

$$\begin{vmatrix}6&6\\3&11\end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix}-6&-2\\3&11\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}-6&-2\\6&6\end{vmatrix}$$

$$66-18 \quad -(-66+6) \quad -36+12$$

$$A_{BCS} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{e}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-32\\0\\16\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1280} \approx \underline{\underline{17{,}89\,(E^2)}}$$

$$\begin{vmatrix}-4&0\\0&8\end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix}0&4\\0&8\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}0&4\\-4&0\end{vmatrix}$$

$$-32 \qquad 0 \qquad 16$$

$$A_{ACS} = \frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{d}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\11\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}4\\60\\-32\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4640} \approx \underline{\underline{34{,}06\,(E^2)}}$$

$$\begin{vmatrix}2&6\\3&11\end{vmatrix} \quad -\begin{vmatrix}-6&-2\\3&11\end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix}-6&-2\\2&6\end{vmatrix}$$

$$22-18 \quad -(-66+6) \quad -36+4$$

---

3) $|\vec{b}| = \sqrt{49} = \underline{7}$

h_{AC} : Ebene $\perp$ AC durch S: $-6x+2y+3z = 22$

Gerade durch AC : $X = \begin{pmatrix}5\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\3\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 5 - 6t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= -1 + 3t \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Ebene}$$

$$-6(5-6t)+2(-1+2t)+3(-1+3t) = 22$$

$$-30+36t-2+4t-3+9t = 22$$

$$49t = 57$$

$$t = \frac{57}{49}$$

$$\left.\begin{aligned} x &\approx -1{,}98 \rightarrow A \\ y &\approx 1{,}33 \rightarrow B \\ z &\approx 2{,}49 \rightarrow C \end{aligned}\right\} \underline{F(-1{,}98 \mid 1{,}33 \mid 2{,}49)}$$

$$\vec{FS} = \begin{pmatrix} 4{,}98 \\ 3{,}67 \\ 7{,}51 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow A \\ \rightarrow B \\ \rightarrow C \end{matrix} \qquad h_{AC} = |\vec{FS}| \approx \underline{\underline{9{,}73}} \rightarrow D$$

$$A_{ACS} = \frac{b \cdot h_{AC}}{2} = \frac{7 \cdot 9{,}73}{2} \approx \underline{\underline{34{,}06 (E^2)}}$$

4) $$\beta = \arccos \frac{\vec{FB} \cdot \vec{FS}}{|\vec{FB}| \cdot |\vec{FS}|} = \arccos \frac{\begin{pmatrix} 0{,}98 \\ 3{,}67 \\ -0{,}49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}98 \\ 3{,}67 \\ 7{,}51 \end{pmatrix}}{\sqrt{14{,}67} \cdot \sqrt{18833{,}56}} =$$

$$= \arccos \frac{14{,}6694}{525{,}715}$$

$$\underline{\underline{\beta \approx 88{,}4^\circ}}$$

5) Ebene durch $\overline{AC} \parallel \overline{BS}$: $\vec{AC}$ und $\vec{BS}$ sind RiVe

$$\text{Normalv.} = \vec{AC} \times \vec{BS} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \qquad - \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$16 \qquad -(-48-12) \qquad -8$$

Projektion $\vec{AS}$ auf $\vec{n}_0$: $$d = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{45}} = \frac{-8+90-22}{\sqrt{45}} \approx \underline{\underline{8{,}94}}$$