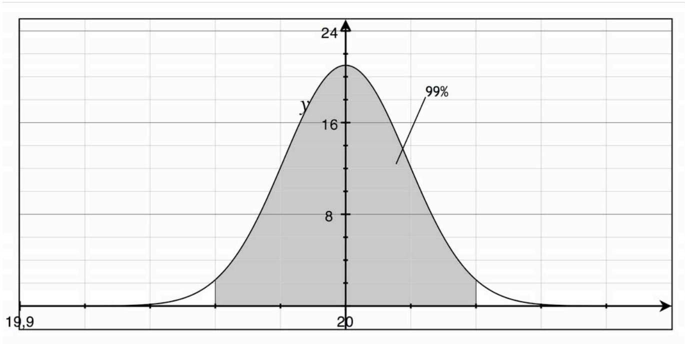
Weitere Lösungen

1a. Ein Hersteller garantiert, dass in einer Warensendung mit Beilagscheiben von 20mm Durchmesser (Erwartungswert) höchstens 1% der Ware die erlaubte Toleranzgrenze von ±0,05mm überschreitet. Wie groß darf die Streuung der Durchmesser unter dieser Voraussetzung höchstens sein? *Annahme ist hier und bei den folgenden Aufgaben eine Normalverteilung der Durchmesser.*

$$\mu = 20$$
$$\varepsilon = 0{,}05 = z \cdot \sigma$$
$$2 \cdot \Phi(z) - 1 = 0{,}99 \quad |+1 \quad |:2$$
$$\Phi(z) = 0{,}995$$
$$\underline{\underline{z = 2{,}58}}$$
$$0{,}05 = 2{,}58 \cdot \sigma \quad |:2{,}58$$
$$\underline{\underline{\sigma = 0{,}019}}$$



Die Streuung darf höchstens 0,19mm betragen.

1b. Welche Toleranzgrenze müsste man bei einer Streuung von σ = 0,1mm erlauben, damit nicht mehr als 1% der Beilagscheiben als fehlerhaft gelten?

$$\varepsilon = z \cdot \sigma = 2{,}58 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}258}}$$

Als Toleranzbereich sollte man mindestens ±0,26mm nehmen.

1c. Wieviel % der Beilagscheiben entsprechen bei einer Toleranzgrenze von ±0,05mm und einer Streuung von σ = 0,1mm nicht den Spezifikationen?

$$\varepsilon = 0{,}05$$
$$\sigma = 0{,}1$$
$$z = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \underline{0{,}5}$$
$$\text{Antistreubereich: } 2\left(1 - \Phi(0{,}5)\right) = \underline{\underline{0{,}617}}$$

Ca. 62% entsprechen nicht den erlaubten Werten.

1d. In einer Sendung von 50 Stück befinden sich 5 fehlerhafte Beilagscheiben. 10 Stück aus dieser Lieferung werden stichprobenartig kontrolliert. (ungeordnete Stichprobe ohne zurücklegen) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein fehlerhaftes Stück entdeckt wird?

$$P = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41} = 0{,}31$$

Die Wahrscheinlichkeit, nur fehlerfreie Stücke zu erwischen, beträgt 31%

2. Das Dreieck ABC [A(4|1|0), B(0|5|2), C(8|3|4)] istGrundfläche einer Pyramide.
   a) Zeige, dass es sich um ein rechtwinkelig-gleichschenkeliges Dreieck handelt.

$$\vec{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{AC}} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{BC}} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{AB}} \cdot \vec{\mathbf{AC}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -16 + 8 + 8 = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{AB}} \perp \vec{\mathbf{AC}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right| = \sqrt{16+16+4} = \underline{6} \qquad \left|\overrightarrow{\mathbf{AC}}\right| = \sqrt{16+4+16} = \underline{6}$$

$\Rightarrow$ Rechter Winkel beim Punkt A, beide Seiten vom Punkt A weg sind gleich lang.

b) Die Spitze S liegt genau „über“ dem Punkt, bei dem der rechte Winkel ist (d.h. der Vektor von S zu diesem Punkt steht normal auf die Grundfläche ABC). Die Höhe der Pyramide ist genau so groß wie die Länge jeder der Katheten der Grundfläche. Berechne die Koordinaten von S (2 Lösungen, entscheide dich für eine!) sowie das Volumen der Pyramide (Skizze!).

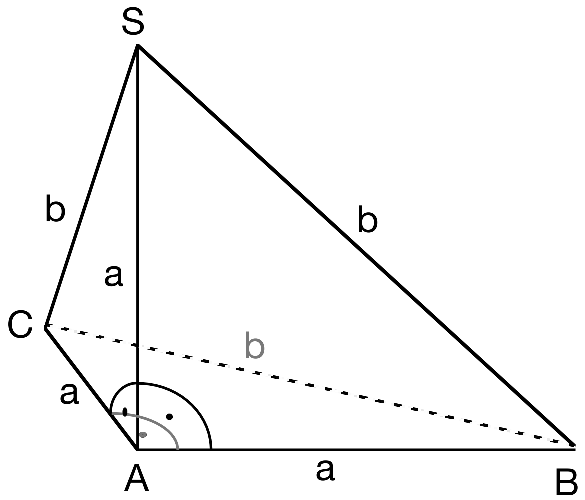
$$\vec{\mathbf{s}} \overset{\text{(Vektoren gekürzt)}}{=} \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & 2\\1 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & 2\\2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\-6\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right| = 3 \Rightarrow \vec{s}_0 = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AS}} = \frac{6}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\mathbf{AS}} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\-4\end{pmatrix}$$

$$\text{2. Lösung: } \vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{A}} - \overrightarrow{\mathbf{AS}} = \begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$$



$$\underline{\underline{\mathbf{S}(6|5|-4)}}$$

$$V = \frac{G\cdot h}{3} = \frac{18\cdot 6}{3} = \underline{\underline{36(E^3)}}$$

c) Berechne eine Gleichung der Ebene, die von der Spitze S und den beiden Endpunkten der Hypotenuse gebildet wird.

$$\varepsilon(SBC): \quad \overrightarrow{\mathbf{BS}} = \begin{pmatrix}6\\0\\-6\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathbf{BC}} = \begin{pmatrix}8\\-2\\2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & -1\\-1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 4\\-1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 4\\0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-5\\-1\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon\colon\ x + 5y + z = 27}}$$

Lösung mit anderem S:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon\colon\ -x + y + 5z = 15}}$$

d) Begründe ohne Rechnung, warum dieses Dreieck (Aufgabe c) ein gleichseitiges Dreieck ist.

Laut Pythagoräischem Lehrsatz haben alle entsprechenden Seiten die Länge $\sqrt{2a^2}$ (s. Skizze).