

1. Schularbeit

8A.

10. 11. 2006

1. Bilde die 1. Ableitung folgender Funktionen:

[8 Punkte]

a) $f(x) = \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$

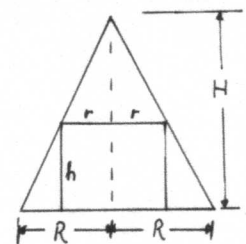
c) $f(x) = 3x \cdot \sin x$

d) $f(x) = \frac{7x}{2-x}$

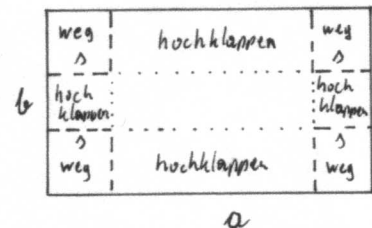
2. Entscheide dich für *entweder* 2a *oder* 2b. Es wird nur eines der beiden Beispiele in die Bewertung einbezogen, das andere **MUSST DU HIER DURCHSTREICHEN!**

[10 Punkte]

2a) Einem Drehkegel soll ein Drehzylinder eingeschrieben werden (s. Skizze). Wie müssen r und h des eingeschriebenen Zylinders gewählt werden, damit dessen Volumen möglichst groß wird? Rechne dieses Beispiel zuerst allgemein, dann mit $R = 9$ und $H = 12$.
(Berechnung des Volumens nicht notwendig!)



2b) Ein rechteckiger Karton hat die Maße $a = 24$ cm und $b = 15$ cm. Aus diesem Karton soll durch Wegschneiden vier gleich großer Quadrate an den Ecken (Seitenlänge s) und Hochklappen der 4 Seiten eine oben offene quaderförmige Schachtel gebastelt werden. Wie groß müssen diese Quadrate sein, damit das Volumen der Schachtel möglichst groß wird? Wie groß ist dieses Volumen?



3. Diskutiere die Funktion $y = e^{-4x} \cdot \sin(4x)$ über \mathbb{R}_0^+ :

[14 Punkte]

- 1) Definitionsmenge (steht schon da) – 2) Die ersten drei Nullstellen – 3) Die ersten zwei Extremwerte
- 4) Die ersten zwei Wendepunkte – 5) Monotonie – 6) Krümmung – 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- 8) Graph zeichnen (hier auf der Rückseite, beachte die gedruckten Einheiten)

Falls du nicht weiterkommst: Die 1. Und 2. Ableitung lauten $y' = -4e^{-4x} \cdot (\sin(4x) - \cos(4x))$ und

$y'' = -32e^{-4x} \cdot \cos(4x)$

4. Zusatzbeispiel (muss nicht gerechnet werden!): Wie muss man die Variablen a , b und c in der Polynomfunktion $y = ax^4 + bx^3 + c$ wählen, damit ihr Funktionsgraph durch den Punkt $A = (1|1)$ geht und dort einen Wendepunkt mit der Steigung -2 hat?

[8 Punkte]

Insgesamt 32 Punkte	0—15,9 Nicht genügend	16—20,4 Genügend	20,5—25,4 Befriedigend	25,5—29,4 Gut	29,5—32 Sehr gut
------------------------	--------------------------	---------------------	---------------------------	------------------	---------------------

B

$$1a) f'(x) = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \cdot \left(-\sin \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cdot 2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2}}}$$

$$b) f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}x - (1-\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-1-1+\ln x}{x^2} = \underline{\underline{\frac{\ln x - 2}{x^2}}}$$

$$c) f'(x) = \underline{\underline{3\sin x + 3x \cos x}}$$

$$d) f'(x) = \frac{7(2-x) - 7x \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{14-7x+7x}{(2-x)^2} = \underline{\underline{\frac{14}{(2-x)^2}}}$$

$$2a) \text{ HB: } V = r^2 \pi h \rightarrow \text{Max.}$$

$$\text{NB: } R:H = r:(H-h)$$

$$HR - Rh = Hr$$

$$h = \frac{HR - Hr}{R}$$

$$\text{HB: } V(r) = r^2 \pi \frac{H(R-r)}{R}$$

$$\bar{V}(r) = r^2(R-r) = Rr^2 - r^3$$

$$\bar{V}'(r) = 2Rr - 3r^2$$

$$\bar{V}''(r) = 2R - 6r$$

$$\text{Max: } r(2R - 3r) = 0 \Rightarrow 2R = 3r$$

$$\underline{\underline{r = \frac{2}{3}R}}$$

$$V''\left(\frac{2}{3}R\right) = 2R - 4R = -2R \checkmark$$

$$h = \frac{HR - H \frac{2}{3}R}{R} = H - \frac{2}{3}H$$

$$\underline{\underline{h = \frac{1}{3}H}}$$

$$R = 9; H = 12; \underline{\underline{r = 6; h = 4}}$$

$$2b) \text{ siehe gr. A 2a)}$$

$$3) \quad \underline{y = e^{-4x} \cdot \sin(4x)}$$

$$y' = -4e^{-4x} \sin(4x) + e^{-4x} \cos(4x) \cdot 4$$

$$\underline{y' = -4e^{-4x} (\sin(4x) - \cos(4x))}$$

$$y'' = 16e^{-4x} (\sin(4x) - \cos(4x)) + (-4e^{-4x}) (4\cos(4x) + 4\sin(4x)) =$$

$$= 16e^{-4x} (\sin(4x) - \cos(4x) - \cos(4x) - \sin(4x))$$

$$\underline{y'' = -32e^{-4x} \cos(4x)}$$

$$1) D = \mathbb{R}_0^+$$

$$2) N: \sin(4x) = 0 \Rightarrow 4x = 0 + k \cdot \pi$$

$$\underline{x = k \frac{\pi}{4}}$$

$$N_1(0|0)$$

$$N_2(0,79|0)$$

$$N_3(1,57|0)$$

$$3) E: \sin(4x) = \cos(4x) \quad | : \cos(4x)$$

$$\tan(4x) = 1 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi = \pi(0,25 + k)$$

$$\underline{x = \frac{\pi}{4} (0,25 + k)}$$

$$H_1(0,20|0,32)$$

$$T_1(0,98|-0,01)$$

$$f''(0,20) = -10,3 \Rightarrow \text{Max.}$$

$$f''(0,98) = 0,45 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$4) W: \cos(4x) = 0 \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \pi(0,5 + k)$$

$$x = \frac{\pi}{4} (0,5 + k)$$

$$W_1(0,39|0,21)$$

$$W_2(1,18|-0,01)$$

5) Von 0 bis H_1 : \nearrow , danach \searrow \nearrow ...

6) Bis W_1 \ominus , danach abw. \oplus \ominus ...

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Beispiel 4) siehe Gr. A

